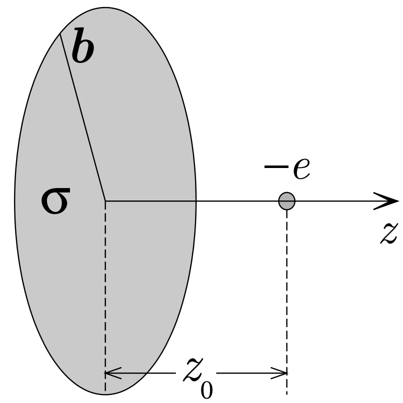
Universidad Simón Bolívar | **FS2211** 2do Parcial (30 %) Bloque **A**

Departamento de Física | Lunes, 25 de Febrero de 2013

Nombre ____________________ Carnet ____________________

1. [8 *pts.*] Se tiene un disco cargado, como se muestra en la figura, de radio $\boldsymbol{b}$ y densidad de carga positiva $\boldsymbol{\sigma}$, localizado en el plano $z = 0$ y con centro en el origen.



   (a) [3 *pts.*] Calcule el potencial electrostático $V(z)$, debido al disco cargado, para cualquier punto arbitrario $(0, 0, z)$ sobre el eje z.

   (b) [3 *pts.*] Calcule el campo eléctrico $\vec{\boldsymbol{E}}$, debido al disco cargado, para cualquier punto arbitrario $(0, 0, z)$ sobre el eje z.

   (c) [2 *pts.*] Un electrón (carga $-e$) se suelta, en reposo, desde la posición $(0, 0, z_0)$, donde $z_0 = \sqrt{3}\,\boldsymbol{b}$. Calcule la velocidad del mismo cuando colisiona con el centro del disco.

(a) El potencial generado por un aro diferencial perteneciente al disco, de carga $\boxed{dQ = \sigma\, 2\pi\, r\, dr}$ (radio $r \in [0, b]$), es $\boxed{dV = k_e\, dQ/R}$, siendo $k_e = 1/4\pi\epsilon_0$ y $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ la distancia desde cualquier punto del aro (centrado en el origen) al punto de observación. Integrando sobre el disco, se obtiene

$$V(z) = \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^b \frac{dQ}{(r^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^b \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{r^2 + z^2} - z\right]} \tag{1}$$

(b) Derivando el potencial, se obtiene el campo eléctrico $\vec{\boldsymbol{E}} = E_z\, \widehat{\boldsymbol{z}}$:

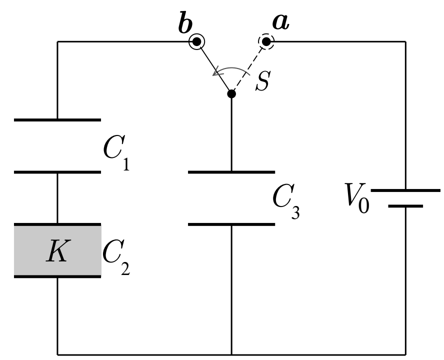
$$E_z = -\frac{dV}{dz} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\boldsymbol{E}} = \left[1 - \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}\right] \widehat{\boldsymbol{z}}} \tag{2}$$

(c) Usando el principio de conservación de la energía mecánica (el campo es conservativo), se tiene $\Delta K = K(z = 0) = -e[V(z = b) - V(z = 0)] = -\Delta U$. Evaluando el potencial (1) en los extremos de la trayectoria:

$$K(z = 0) = \frac{1}{2} m_e\, v^2 = -e[V(z = b) - V(z = 0)] = -\frac{e\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{b^2 + 3b^2} - \sqrt{3}b - b\right] = \frac{e\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{3} - 1\right] b$$

$$\text{de donde} \quad v^2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{e}{m_e}\right) \left[\sqrt{3} - 1\right] b \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{e}{m_e}\right) \left[\sqrt{3} - 1\right] b}} \tag{3}$$

2. [10 *pts.*] En el circuito de capacitores mostrado en la figura, $C_1 = 30.0\,\mu F$, $C_2 = 15.0\,\mu F$ y $C_3 = 20.0\,\mu F$. Inicialmente, ninguno de los tres capacitores contiene dieléctrico en su interior, y los capacitores C_1 y C_2 están descargados. El interruptor S está en la posición $\boldsymbol{a}$, manteniendo cargado el condensador C_3 por medio de una batería que proporciona una diferencia de potencial $V_0 = 300V$. Posteriormente, se pasa el interruptor de la posición $\boldsymbol{a}$ a la posición $\boldsymbol{b}$, quedando la batería desconectada. Una vez alcanzado el equilibrio:



(a) [4 *pts.*] Determine las respectivas cargas $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$, y los voltajes $\{V_1, V_2, V_3\}$ de los tres capacitores.

(b) [4 *pts.*] A continuación, se introduce un dieléctrico de constante $K = 2$ en el capacitor C_2. Calcule su nueva capacitancia C_2', y las respectivas cargas $\{Q_1', Q_2', Q_3'\}$.

(c) [2 *pts.*] Calcule la energía electrostática almacenada en el capacitor C_2, antes y después de introducir el dieléctrico.

Respuestas:

(a) Al haber estado conectado a la batería, el capacitor C_3 tiene una carga $\boxed{Q_0 = C_3 V_0,}$ antes de pasar el interruptor. Esta carga permanecerá invariante después de pasar el interruptor, siendo igual a la suma de las cargas Q_1 y Q_3 en los correspondientes capacitores. Además, al estar los capacitores C_1 y C_2 inicialmente descargados, ambos comparten la misma carga, es decir $Q_1 = Q_2$. El sistema de ecuaciones queda, entonces:

$$\left\{\begin{array}{rcl} Q_1 & = & Q_2 \\ Q_1 + Q_3 & = & Q_0 \\ \dfrac{Q_1}{C_1} + \dfrac{Q_2}{C_2} & = & \dfrac{Q_3}{C_3} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} Q_1 + Q_3 & = & Q_0 \\ Q_1\left(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}\right) & = & \dfrac{Q_3}{C3} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} Q_1\left(1 + \dfrac{C_3}{C_1} + \dfrac{C_3}{C_2}\right) & = & Q_0 \\ Q_3 = Q_0 - Q1 & = & Q_1\left(\dfrac{C_3}{C_1} + \dfrac{C_3}{C_2}\right) \end{array}\right. \tag{4}$$

Usando los valores de C_1, C_2 y C_3, y sabiendo que $\boxed{Q_0 = C_3 V_0 = 2 \times 10^{-5} \times 3 \times 10^2\,V = 6\,mC,}$ se obtiene:

$$\left\{\begin{array}{rcl} Q_1\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\right) & = & 3\,Q_1 = Q_0 \\ Q_3 = Q_1\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\right) & = & 2\,Q_1 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\begin{array}{rcl} Q_1 = Q_2 & = & \frac{1}{3}\,Q_0 = 2\,mC \\ Q_3 & = & \frac{2}{3}\,Q_0 = 4\,mC \end{array}} \tag{5}$$

Dividiendo entre las respectivas capacitancias, se obtienen los voltajes $\{V_1, V_2, V_3\}$:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{1}{3}\,\frac{C_3}{C_1}\,V_0 & = & \frac{2}{9} V_0 = 66.7V \\ V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{1}{3}\,\frac{C_3}{C_2}\,V_0 & = & \frac{4}{9} V_0 = 133.3V \\ V_3 = \frac{Q_3}{C_3} & = & \frac{2}{3}\,V_0 = 200\,V \end{array}} \tag{6}$$

(b) Al introducir el dieléctrico ($K = 2$) en C_2, el sistema de ecuaciones queda igual al sistema (4). Basta cambiar el valor de la capacitancia al correspondiente $\boxed{C_2' = KC_2 = 2C_2}$. Entonces, las soluciones serán análogas a las del sistema (5), *mutatis mutandi* (en lugar de $C_3/C_2 = 4/3$, se tiene $C_3/C_2' = 2/3$):

$$\left\{\begin{array}{rcl} Q_1'\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) & = & \frac{7}{3}\,Q_1' = Q_0 \\ Q_3' = Q_1'\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) & = & \frac{4}{3}\,Q_1' \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\begin{array}{rcl} Q_1' = Q_2' & = & \frac{3}{7}\,Q_0 = \frac{18}{7}\,mC \\ Q_3' & = & \frac{4}{7}\,Q_0 = \frac{24}{7}\,mC \end{array}} \tag{7}$$

(c) Teniendo en (a) los valores de carga y voltaje en el capacitor C_2, basta usar la expresión $U = QV/2$ para la energía acumulada en el capacitor, obteniendo

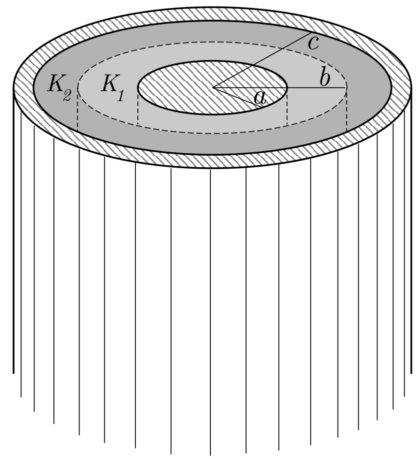
$$U_2 = \frac{1}{2}Q_2V_2 = \frac{2}{27}\,Q_0V_0 = \frac{2}{27}\,(6\times10^{-3})(3\times10^{2})\;J = \frac{36}{27}\times10^{-1}\,J \approx 0.13\,J$$

Teniendo solo la carga en el capacitor C_2', usamos ahora la expresión $U_2' = {Q_2'}^2/2C_2'$, con la cual se obtiene

$$U_2' = \left(\frac{3}{7}Q_0\right)^2 \times \frac{1}{2C_2'} = \frac{3^2\times6^2\times10^{-6}}{7^2\times2\times3\times10^{-5}}\;J = \frac{54}{49}\times10^{-1}\,J \approx 0.11\,J\; < \;U_2.$$

---

3. [12 *pts.*] Se tienen dos conductores cilíndricos coaxiales, uno macizo de radio $\boldsymbol{a}$ y el otro hueco, como se muestra en la figura, de radio interno $\boldsymbol{c}$. El espacio entre ellos está relleno con materiales dieléctricos de constantes K_1 $(a<r<b)$ y K_2 $(b<r<c)$, respectivamente. Se sabe que el potencial en los conductores tiene valores respectivos $V_a = V_0$ $(r=a)$ y $V_c = 0$ $(r=c)$.



(a) [3 *pts.*] Calcule el campo eléctrico $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ en el espacio entre conductores. Suponga conocida la densidad lineal de carga λ_a del conductor interno. Tenga cuidado en especificar el campo en las regiones, con el dieléctrico K_1 $(a<r<b)$, y con el dieléctrico K_2 $(b<r<c)$.

(b) [4 *pts.*] Calcule el potencial eléctrico $V(r)$, especificando las expresiones para las regiones, con el dieléctrico K_1 $(a<r<b)$, y con el dieléctrico K_2 $(b<r<c)$.

(c) [3 *pts.*] A partir del potencial obtenido en (b), calcule la densidad lineal de carga λ_a del conductor interno, y la capacitancia del sistema. (Suponga que los cilindros tienen longitud L).

(d) [2 *pts.*] Determine la densidad de carga σ_{ind}, inducida en la superficie interna $(r=a)$ del dieléctrico K_1.

Respuestas:

(a) La Ley de Gauss con dieléctricos puede resumirse en $K\Phi_E = K\oint \vec{\boldsymbol{E}}\cdot\vec{\boldsymbol{S}} = Q^{ext}/\epsilon_0$, siendo K la constante dieléctrica y Q^{ext} la suma de cargas encerradas que no estén ligadas al dieléctrico. Basta entonces con determinar el campo de cargas libres $\vec{\boldsymbol{E}}^{ext}$, y dividir entre K_i en la región pertinente. En simetría cilíndrica, el campo es radial $\vec{\boldsymbol{E}}^{ext} = E_r^{ext}\,\widehat{\boldsymbol{r}}$ y el flujo a través de un cilindro de radio r y altura h queda:

$$\Phi_E = 2\pi\,r\,h\,E_r^{ext} = \frac{\lambda_a\,h}{\epsilon_0} \quad\Rightarrow\quad E_r^{ext} = \frac{\lambda_a}{2\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r}, \tag{8}$$

con lo cual se obtiene el campo para las dos regiones indicadas:

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\lambda_a}{2\pi\epsilon_0}\begin{cases}\dfrac{\widehat{\boldsymbol{r}}}{K_1\,r} & \text{para}\quad a<r<b\\[2ex] \dfrac{\widehat{\boldsymbol{r}}}{K_2\,r} & \text{para}\quad b<r<c\end{cases}} \tag{9}$$

(b) Tomando el voltaje definido en $r=c$, $V_c\equiv0$, como referencia, calculamos el potencial electrostático $V(r)$ para la región con el dieléctrico K_2 $\underline{(b<r<c)}$:

$$V(r) = -\int_c^r \vec{\boldsymbol{E}}\cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = -\frac{\lambda_a}{2\pi\epsilon_0\,K_2}\int_c^r\frac{dr}{r} = \frac{\lambda_a}{2\pi\epsilon_0\,K_2}\,\ln\left(\frac{c}{r}\right) \quad\Rightarrow\quad \boxed{V(r=b)\equiv V_b = \frac{\lambda_a}{2\pi\epsilon_0\,K_2}\,\ln\left(\frac{c}{b}\right)} \tag{10}$$

Usamos la expresión resaltada en (10) como referencia en la segunda parte del cálculo, y obtenemos para la región con el dieléctrico K_1 $\underline{(a<r<b)}$:

$$V(r) = V_b - \int_b^r \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = V_b - \frac{\lambda_a}{2\pi\epsilon_0 K_1} \int_b^r \frac{dr}{r} = \frac{\lambda_a}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{K_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right) + \frac{1}{K_1} \ln\left(\frac{b}{r}\right) \right] \tag{11}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(r=a) \equiv V_a = \frac{\lambda_a}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{K_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right) + \frac{1}{K_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]} \tag{12}$$

(c) La última expresión, resaltada en (12), nos permite obtener el valor de la densidad λ_a en función de los datos del problema. Multiplicando λ_a por la longitud L del cilindro interno, se obtiene, además la relación voltaje–carga, y con ella el valor de la capacitancia del sistema:

$$\boxed{\lambda_a = \frac{2\pi\epsilon_0}{\left[\frac{1}{K_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right) + \frac{1}{K_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]} V_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\left[\frac{1}{K_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right) + \frac{1}{K_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]}} \tag{13}$$

(d) Basta con aplicar la Ley de Gauss en un entorno de la superficie $r = a$, sabiendo que dentro del conductor interno el campo $E_r(a^-)$ es nulo, para obtener

$$\begin{aligned} 2\pi\, a\, h\, [\, E_r(a^+) - E_r(a^-)\,] &= \left(\frac{\lambda_a + \lambda_{ind}}{\epsilon_0}\right) h \quad \text{(carga encerrada)}/\epsilon_0 \\ &= 2\pi\, a\, h \left[\frac{\lambda_a}{2\pi\,\epsilon_0\, K_1 a}\right] \quad \Rightarrow \quad \lambda_{ind} = \lambda_a \left(\frac{1}{K_1} - 1\right) \end{aligned} \tag{14}$$

Dividiendo las densidades lineales entre el perímetro $2\pi\, a$, se obtienen las densidades superficiales, de donde

$$\boxed{\sigma_{ind} = \sigma_a \left(\frac{1}{K_1} - 1\right)} \tag{15}$$